Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Asuntos de interés indagatorio en Álgebra Educativa

Andrés González R[1].
agorondell@gmail.com

Universidad Pedagógica Experimental Libertador-IPMAR
Venezuela

Recibido: Agosto, 2020
Aceptado: Octubre, 2020

RESUMEN

El álgebra educativa constituye un espacio de interés indagatorio en Educación Matemática (EM). En el caso de los primeros niveles de escolaridad, esto se manifiesta en los distintos enfoques propuestos para la introducción del álgebra, la presencia de las corrientes denominadas *álgebra temprana* y *preálgebra*, que difieren en torno a los fines y los momentos más oportunos para la introducción del álgebra; y la existencia de propuestas metodológicas, como la del Modelo Teórico Local de Filloy (1999), para desarrollar investigaciones, entre otras. En consecuencia, el propósito de este ensayo es ofrecer detalles relacionados con algunos de los asuntos planteados por la línea de investigación en didáctica del álgebra y pensamiento algebraico (LIDALGEBRA), la expectativa es que esta exposición sirva de aliciente para que todos aquellos educadores e investigadores de la EM se sientan atraídos por estos temas y que puedan evidenciar su importancia así como sus reales posibilidades de concreción.

Palabras clave: Educación Matemática; didáctica del álgebra; investigación.

[1] Profesor de Matemática (UPEL), Doctor en Educación (UCV), Magíster Enseñanza de la Matemática (UPEL) y Especialista en Informática Educativa (USB). Profesor Asociado del Instituto Pedagógico de Maracay. En la actualidad (2020) es el Jefe del Departamento de Matemática y Coordinador de la Línea de Investigación en Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico (LIDALGEBRA) del Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM). Autor de varios artículos relacionados con la enseñanza del Álgebra.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Matters of indagatory interest in Educational Algebra

Andrés González R
agorondell@gmail.com

Universidad Pedagógica Experimental Libertador-IPMAR
Venezuela

Received: August, 2020
Accepted: October, 2020

ABSTRACT

Educational algebra constitutes a space of inquiry interest in Mathematical Education (MS). In the case of the first levels of schooling, this is manifested in the different approaches proposed for the introduction of algebra, the presence of currents called early algebra and pre-algebra, which differ around the most opportune ends and moments for such introduction; and the existence of methodological proposals, such as that of Filloy's Local Theoretical Model (1999), to carry out research. Consequently, the purpose of this essay is to offer details related to some of the issues raised by the line of research in didactics of algebra and algebraic thought (LIDALGEBRA), the expectation is that this exhibition will serve as an incentive for all those educators and researchers MS are attracted to these issues and that they can demonstrate their importance as well as their real possibilities of realization.

Keywords: Mathematics education; algebra teaching; research

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Questões de interesse indagatório na Algebra Educacional

Andrés González R
agorondell@gmail.com

Universidad Pedagógica Experimental Libertador-IPMAR

Venezuela

Data de recepção: agosto de 2020
Data de aceitação: outubro de 2020

RESUMO

A álgebra educacional constitui um espaço de interesse para a Educação Matemática (EM). No caso dos primeiros níveis de escolaridade, isso se manifesta nas diferentes abordagens propostas para a introdução da álgebra, na presença de correntes chamadas álgebra precoce e pré-álgebra, que diferem em torno dos fins e momentos mais oportunos para tal introdução e a existência de propostas metodológicas, como a do Modelo Teórico Local de Filloy (1999), para a realização de pesquisas. Consequentemente, o objetivo deste ensaio é oferecer detalhes relacionados a algumas das questões levantadas pela linha de pesquisa em didática do álgebra e do pensamento algébrico (LIDALGEBRA), a expectativa é que essa exposição sirva de incentivo para todos os educadores e pesquisadores dos EM são atraídos por essas questões e podem demonstrar sua importância e suas reais possibilidades de concretização.

Palavras chave: Ensino de matemática, ensino de álgebra, pesquisa.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Introducción

El término pensamiento algebraico lo concebimos de dos maneras, por una parte, alude al tipo de pensamiento matemático que activan las personas ante cualquier situación de naturaleza algebraica, está relacionado con: (a) la reversibilidad de las transformaciones que se efectúan sobre los objetos matemáticos; (b) el manejo consciente de lo general y lo particular, y (c) el lenguaje algebraico, entre otros indicadores. También lo empleamos para identificar un área de investigación en Educación Matemática (EM) cuyo asunto de interés indagatorio se concentra en "los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el sistema educativo y en el medio social" (Socas, 1999, p.261). El pensamiento algebraico es el foco de la línea de investigación en didáctica del álgebra y pensamiento algebraico (LIDALGEBRA) algunos de sus objetivos, expuestos en González (2015), son:

— Realizar investigaciones orientadas a comprender la complejidad del proceso de transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico (de la escuela al liceo).
— Caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes en los diferentes niveles del sistema escolar venezolano. Particularmente, el de los futuros profesores de matemática.
— Analizar las diferentes tendencias para la introducción del álgebra escolar.
— Estudiar el proceso de generalización y el reconocimiento de patrones.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

— Diseñar, elaborar, implementar y validar propuestas didácticas para la introducción del álgebra escolar.

— Estudiar el impacto de la mediación tecnológica en los procesos relacionados con el pensamiento algebraico.

— Producir recursos educativos orientados a mejorar la comprensión de los objetos y procesos algebraicos.

— Estudiar la naturaleza de los fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los objetos y procesos algebraicos.

— Proponer modelos teóricos interpretativos (constructos, nociones, conceptos y enfoques) en relación con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (p.7).

En consecuencia, nos proponemos detallar algunos temas delineados en González (2015) a fin de promover el interés de la comunidad científica en desarrollar investigaciones en este ámbito. Específicamente, ahondamos en asuntos propios del álgebra educativa (o álgebra escolar), también exponemos algunos rasgos relevantes que caracterizan el Álgebra Temprana y Pre-Álgebra como corrientes para introducir el Álgebra, y finalmente describimos algunas teorías que han sido desarrolladas en este contexto.

Algunos temas a investigar en álgebra educativa

Al igual que ocurre con el término matemática escolar resulta difícil precisar la definición de álgebra educativa (Filloy, 1999), no es una tarea sencilla por la diversidad y complejidad de las aristas que deben considerarse, entre las cuales están las relacionadas con la conceptualización del álgebra como rama de la

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Matemática, las relaciones entre pensamiento y lenguaje, y fundamentalmente la que tiene que ver con el currículum, entre otras. Desde nuestro punto de vista constituye tanto un objeto como un método. Como objeto consideramos el álgebra educativa como el conjunto de contenidos algebraicos propios de los niveles primario y medio de la escolaridad. Mientras que como método, aludimos al ámbito de la EM cuyo centro de interés indagatorio es la enseñanza y aprendizaje de tales contenidos, en este sentido Serres (2007) la define como "la rama de la matemática educativa que estudia el conocimiento algebraico, su aprendizaje y su didáctica (p. 5). En algunos casos empleamos indistintamente los términos álgebra escolar o álgebra elemental.

Entre los temas que han sido investigados en este contexto, según Kieran y Filloy (1989) están: el marco de referencia aritmético; variables, expresiones y ecuaciones; la resolución de ecuaciones, funciones y sus gráficas; y enfoques que usan computadoras. En el caso particular del marco de referencia aritmético se tiene que el mismo da cuenta de: (a) la forma que tienen los estudiantes de ver el signo de igualdad; (b) sus dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación del álgebra; y (c) su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas.

Además, las investigaciones de Chevallard (1985), Kieran y Filloy (1989), Kieran (1989), y Filloy (1999) revelan las dificultades que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar entre las que podemos destacar aquellas que experimentan los alumnos cuando se avanza progresivamente a sistemas de representación más abstractos, en los cuales aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de generalización.

En torno a los errores intrínsecos que conlleva el aprendizaje del álgebra, Filloy (1999) señala los siguientes: errores usuales de sintaxis al operar expresiones algebraicas, errores de traducción al resolver problemas en el lenguaje natural, ausencia del significado o interpretaciones erróneas del significado de las expresiones algebraicas (tomando en cuenta los diferentes contextos en que aparecen); y como dificultad la imposibilidad de utilizar el álgebra para resolver problemas.

Lo relacionado con las competencias también ha sido considerado, en este sentido señala Palarea (1998) que en el aprendizaje del álgebra debe tomarse en cuenta "un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático" (p.6). Por lo tanto, resulta importante atender la clasificación de las competencias algebraicas realizada por Socas, Camacho y Hernández (1998) que mostramos en el cuadro 1.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Cuadro 1.
Clasificación de las competencias algebraicas

Competencia	Indicador
Habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas	Formular problemas algebraicos, aplicar diferentes estrategias en la resolución de problemas algebraicos, verificar e interpretar resultados y generalizar soluciones
Habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas	Expresar ideas matemáticas usando el lenguaje algebraico tanto verbal como escrito, comprender e interpretar las ideas que se presentan en lenguaje algebraico y usar la notación algebraica para estructurar y representar ideas, describir situaciones y modelos.
Habilidad para razonar y analizar información dada en lenguaje algebraico	Analizar situaciones en lenguaje algebraico para determinar propiedades y estructuras comunes, usar el razonamiento deductivo para verificar conclusiones y construir razonamientos válidos expresados en lenguaje algebraico, usar el razonamiento inductivo y el lenguaje algebraico para hacer, reconocer y refutar conjeturas
Conocimiento y entendimiento de los conceptos y procedimientos algebraicos	Clasificar y definir objetos expresados en lenguaje algebraico, identificar y generar ejemplos y contraejemplos, usar diferentes representaciones semióticas para representar los objetos del álgebra, reconocer los distintos significados y representaciones de los objetos del Álgebra, identificar propiedades de los objetos algebraicos y determinar condiciones que determina un objeto particular, comparar y contrastar objetos del Álgebra
Disposición positiva hacia el Álgebra	Confianza en el Álgebra para resolver problemas, comunicar ideas y razonar, flexibilidad y tolerancia en la exploración de objetos algebraicos, predisposición a perseverar en la búsqueda de soluciones o conclusiones cuando trabaja con objetos algebraicos, interés, curiosidad y creatividad en los trabajos con Álgebra, apreciaciones de las aplicaciones del Álgebra a otras áreas y a experiencias de la vida cotidiana.

Fuente: Elaboración propia a partir de Socas et al. (1998).

En Venezuela se han llevado cabo algunos estudios (Mosquera, 2017; Serres, 2011; Andonegui, 2009; Valdivé y Escobar, 2011; entre otros) que muestran un creciente interés por el álgebra escolar. Sin embargo, y a pesar de la descripción que hemos presentado en los párrafos precedentes, son notoriamente escasas las investigaciones que declaran explícitamente el álgebra educativa

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

como el marco contextual epistemológico en que sumergen sus asuntos de interés indagatorio.

Necesidad de estrategias específicas en la enseñanza del álgebra escolar

Desde el punto de vista didáctico, en lo atinente a la enseñanza de productos notables y factorización es emblemática la ausencia de referentes aritméticos y geométricos; anulando así, en el primer caso, la metodología inductiva consistente en el estudio de casos particulares, y prevaleciendo una enseñanza de naturaleza deductiva en la que previamente se plantean fórmulas que el estudiante debe aplicar en distintos tipos de ejercicios.

Por su parte, el abandono de la geometría como instrumento del álgebra (Samper, 1996), supone invisibilizar los orígenes del álgebra, inclusive desconocer que el Libro II de *Los Elementos* de Euclides (s. III AC) inspiró el acuñamiento del término álgebra geométrica, en 1886, por el historiador de la Matemática H. G. Zeuthen (1839-1920). Significa, además, omitir que esta vinculación entre álgebra y geometría también está presente en contenidos específicos como los determinantes de órdenes 2x2 y 3x3, los cuales tienen importantes aplicaciones “naturales” en la enseñanza de la Matemática tales como el cálculo de áreas y volúmenes.

Otro caso significativo lo encontramos en el tema de polinomios, su introducción y el manejo de sus operaciones es absolutamente clásico, con un esquema inamovible. Además, resulta destacable, tal como lo señalan Valdivé y Escobar (2011), que el discurso escolar usa indistintamente la noción de polinomio como función polinómica y expresión polinómica en un contexto algebraico, lo cual

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

resulta interesante ya que, en el caso de campos finitos como Z_n, (n primo), estas nociones no siempre son intercambiables. Por ejemplo en Z_2, los polinomios $f = x^3 + x^2 + x + 1$ y $g = x^2 + 1$ aunque son diferentes definen la misma función polinómica.

Si juntamos los polinomios con los ejemplos anteriormente considerados conseguimos un conjunto de temas en el que persiste un manejo metodológico tradicional que se reitera a través del tiempo a pesar de las aportaciones que han hecho las investigaciones. Esto es solo una pequeña muestra de las insuficiencias que se consiguen cuando enfocamos lo atinente al diseño y validación de estrategias que hacen uso de recursos específicos para la enseñanza de los contenidos escolares algebraicos.

Enfoques y corrientes para introducir el álgebra escolar

Los medios y estrategias potencialmente factibles para la introducción del álgebra en la escolaridad también han sido estudiados. En este sentido Bednarz, Kieran y Lee (1996) han establecido cinco enfoques para su enseñanza: histórica, generalización (de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas), resolución de problemas, modelización (de situaciones matemáticas y de situaciones concretas), y la perspectiva funcional. Particularmente, el enfoque de generalización forma parte de los trabajos realizados por Radford (2010) con el estudio de la generalización mediante el tema de patrones y regularidades.

Adicionalmente, en relación con los momentos escolares propiciatorios para el álgebra así como sus aspectos teleológicos han emergido dos corrientes diferenciadas, pero no excluyentes: Álgebra Temprana (AT) y Pre-Álgebra (PA), a continuación haremos una breve descripción de ambas tendencias.

Álgebra Temprana

El AT es una corriente que parte del principio de que es posible desarrollar algunos aspectos propios del álgebra en los primeros niveles de la escolaridad, se inicia en la extinta Unión Soviética con Davydov (1995) con su *teoría de la actividad de aprendizaje y el desarrollo del aprendizaje*, luego en Estados Unidos la toma Kaput (1996) quien ha llevado a cabo diversos trabajos en el seno de la comunidad de investigadores en Educación Matemática de ese país, apoyándose por las recomendaciones del NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, por sus siglas en inglés). En particular, a partir de esta corriente se ha logrado que “la notación algebraica sea introducida entre los grados tercero y quinto de primaria” (Schlieman, Carraher y Brizuela, p. 15).

Además, también se cuestiona el tiempo de aparición del álgebra, ya que se afirma que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra tradicionalmente son prolongados y parece oportuno iniciar ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años), aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la educación primaria. Esto último es muy importante, pues significa aprovechar los mismos contenidos de la escolaridad y no insertarlos en contenidos más avanzados.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

De manera concreta, se propone incorporar a las aulas de educación primaria actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para, de este modo, desarrollar competencias propias del álgebra (Socas, 2011). Como ya se indicó, dicho planteamiento se sustenta en investigaciones relacionadas con la didáctica del álgebra, entre las que se encuentra Kaput (1996).

Un ejemplo de estudio desarrollado en esta corriente es el que realizaron Barrio, Lalanne y Petich (2010), en Argentina, relacionado con la introducción de ecuaciones diofánticas (ED) en la escuela; estas ED son ecuaciones en dos variables, cuyo conjunto solución contiene infinitos pares. El trabajo consideró la noción de variable y la generalización, abarcó los grados primero a tercero, y el séptimo, respetando en cada caso el nivel cognitivo de los estudiantes. Sus resultados alientan a darle continuidad. Según sus autores, “no estamos pensando en niños planteando ecuaciones, pero hemos comprobado que pueden resolver problemas modelizables mediante estas ecuaciones” (p. 15). Para llevar a cabo la investigación asumieron la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2006)

Críticas al Álgebra Temprana

Dado el énfasis que hace de la relación entre aritmética y álgebra, y a pesar de que el AT reconoce los prerrequisitos del desarrollo para el aprendizaje del álgebra esta corriente no está exenta de críticas, algunas de ellas son expuestas por Butto y Rojano (2004), quienes en su artículo se valen de los alegatos que hace Radford (2010) a las ideas fundamentales de Schlieman, Carraer, y Brizuela (2011) relacionadas con los supuestos del álgebra temprana.

Por ejemplo, citando a Radford (2010) señalan que este autor: (a) niega la idea de operar con lo desconocido ya que esto ha sido refutado experimental e históricamente desde mucho tiempo atrás; (b) se opone a la idea de que las operaciones aritméticas conducen al significado algebraico y que el contacto temprano con el álgebra puede ayudar a construir significados dentro de la aritmética de los niños; (c) opina que no es conveniente relacionar solamente el álgebra con la aritmética, pues la restringe a un solo campo del desarrollo, perdiéndose "de vista algunas expectativas importantes para incorporar conceptos aritméticos de otros campos, como el de la aritmética geometrizada" (Butto y Rojano, p. 116).

Pre-Álgebra

Esta corriente tiene su origen con el hecho de que, como señala Socas (2011), las investigaciones, mostraban que la perspectiva del álgebra como aritmética generalizada era insuficiente para desarrollar en los alumnos un pensamiento algebraico adecuado y que el uso de nuevas fuentes de significados, como las nuevas tecnologías facilitaban entornos de enseñanza aprendizaje del álgebra que aportaban concepciones diferentes de la misma.

Para este autor, esta corriente se apoya, en dos hechos esenciales. Uno, es la concepción de que el álgebra está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero en el que la noción de dicho simbolismo es una concepción mucho más amplia y va más allá de las escrituras formales de la aritmética

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

generalizada. Y, dos, en la validez de las propuestas de organización de los estadios de desarrollo cognitivos en la que el álgebra ocupa el estadio de desarrollo formal, y por lo tanto se considera fuera de las capacidades cognitivas de los alumnos en los primeros años de la educación primaria.

En consecuencia, en la corriente Pre-Álgebra se apuesta, inicialmente, por un acercamiento prealgebraico para los últimos cursos de educación primaria. En este acercamiento al álgebra la tecnología se propone también como un mediador muy interesante, sobre esta última vinculación Kaput (1996) ha realizado algunas contribuciones. En el cuadro 2 resumimos algunas diferencias y similitudes entre las corrientes Pre-Álgebra y Álgebra Temprana.

Cuadro 2
Comparación entre las corrientes Pre-Álgebra y Álgebra Temprana

Similitudes	Diferencias
Ambas sugieren un aprendizaje con comprensión de las Matemáticas que facilite el aprendizaje del álgebra.	El fin de PA es facilitar la transición de la aritmética al álgebra, dadas las dificultades y los errores que tienen los alumnos en álgebra, como consecuencia de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la educación primaria.
Son corrientes relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de ciertos aspectos de las Matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra.	AT apuesta por incorporar modos de pensamiento algebraico al desarrollo curricular de educación primaria como parte integrante del pensamiento matemático de esta etapa educativa.
Ambas se encuentran en una fase de desarrollo inicial en los tres ámbitos que caracterizan la Educación Matemática: epistemológico, cognitivo y didáctico.	Para PA la enseñanza formal del álgebra debe comenzar en la educación secundaria obligatoria (el Liceo).
	Para AT, el álgebra debe comenzar en la educación primaria.
	En AT no se percibe una distinción entre la aritmética y el álgebra.

Fuente: Elaboración propia a partir de Socas (2011)

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Algunas teorías para el desarrollo de investigaciones

Para desarrollar investigaciones en el ámbito del pensamiento algebraico consideramos de mucho interés el Modelo Teórico Local (MTL) de Filloy (1999), pues actúa como marco teórico y metodológico, regulador y orientador de las indagaciones que se planteen. El MTL está vinculado con el concepto de Sistema Matemático de Signos (SMS) de este mismo autor, además incluye cuatro componentes interconectados entre sí: (a) modelo de enseñanza, (b) modelo de los procesos cognitivos, (c) modelo de competencia formal y (d) modelos de comunicación. Dicho modelo ha sido desarrollado exitosamente por Butto y Rojano (2004) al explorar el Álgebra Temprana mediante contenidos geométricos superando de esa manera algunas críticas que se han formulado y que expusimos anteriormente.

A continuación exponemos algunas teorías que han sido desarrolladas por distintos investigadores que abordan los contenidos y procesos algebraicos como su objeto de interés particular.

Teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval

Lo referido a las representaciones es el aspecto crucial en la teoría de Duval (2006): las notaciones simbólicas diversas, cualquier diagrama, esquema, una figura, etc., también se incluyen las fórmulas matemáticas así como los enunciados verbales. Estos objetos Duval (2006) los denomina representaciones semióticas y son medios de exteriorización de las representaciones metales para fines de comunicación es decir, para hacerlos visibles o accesibles a otros.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Una pregunta importante en esta teoría es ¿cuáles son las condiciones bajo las cuales un numeral o un dibujo, por ejemplo, funcionan como una fidedigna representación del objeto matemático que pretende aludir?, en este sentido establece que una representación funciona verdaderamente como representación cuando da acceso al objeto representado. Enfatiza la importancia de que "el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación" (Duval, 2006; p. 12).

En este sentido Duval se plantea dos preguntas las cuales considera que constituyen el núcleo del aprendizaje de las matemáticas: (a) ¿Cómo se aprende a cambiar de registro?, y (b) ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone? Según él, muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones. Esta teoría permite analizar las representaciones que los alumnos y los docentes emplean para resolver un problema. Señala que es esencial para la actividad matemática que se puedan movilizar varios signos en el curso de una misma acción, o bien que se tenga la habilidad para elegir un signo en lugar de otro. Consecuentemente, son principios: (a) La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación; y (b) Los estudiantes deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Para Duval estos dos elementos son posibles, metodológicamente, mediante dos clases de transformaciones de las representaciones semióticas: *la conversión* y *el tratamiento*; y, metacognitivamente, empleando como estrategia el concepto de *coordinación interna*. La *conversión* es la transformación de una representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Se trata de una transformación externa a un registro. Un ejemplo es la transformación de la representación algebraica $y = x^2 + 9x + 14$ en su correspondiente representación gráfica.

El *tratamiento* de una representación se entiende como su transformación en el mismo registro en el cual ha sido formulada. Se trata entonces de una transformación interna a un registro. Un ejemplo es la transformación de la expresión algebraica $y = x^2 + 9x + 14$ en su forma factorizada $y = (x + 2)(x + 7)$. El proceso de simplificación o amplificación de una fracción es otro ejemplo de tratamiento.

Teoría de la Objetivación de Luis Radford

Para la teoría de la objetivación de Radford (2010) es fundamental entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje del alumno. Esta teoría otorga un papel relevante a la acción (entendida como labor o actividad) y la palabra (lenguaje. Se concibe que los sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Al colocarse el lenguaje entre sujeto y objeto hace que el objeto sea percibido por el sujeto ya no como el objeto puro, sino como objeto transformado por la acción que ejercen los lentes que ofrece la cultura, en este sentido el lenguaje funciona como medio cultural de significación.

Radford (2010) considera que los signos y símbolos utilizados en el álgebra escolar se han considerado como un sistema semiótico por excelencia. Sin embargo, también admite que, desde una perspectiva semiótica, las palabras y los gestos también pueden ser signos de naturaleza algebraica, sin que esto signifique que deban ser equivalentes o que simplemente puedan sustituirse unos por otros, esto es así debido a que no es en sí misma la simbología utilizada lo que en realidad identifica un sistema semiótico, sino las significaciones que hacen las personas.

La idea de medios semióticos de objetivación (artefactos, gestos, símbolos, palabras) es considerada como recurso semiótico. Para Radford los medios semióticos de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes.

Por otra parte, algunos aspectos generales de la Teoría de Objetivación son: (a) parte de una posición política-conceptual que le da su propia forma y contenido; (b) en esta posición política-conceptual reposa en una idea general acerca de la educación; (c) la educación en general y la enseñanza y aprendizaje

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

en particular no tratan de saberes únicamente; y, (d) la educación en general y la enseñanza y aprendizaje en particular tratan de *saberes* y de *seres*.

La Epistemografía de Jean-Philippe Drouhard

Drouhard (2009) ha acuñado y desarrollado el término Epistemografía para referirse al cuerpo de conocimientos que debe poseer un estudiante para poder hacer *matemática que sea verdaderamente matemática*. Según este autor: "Elegimos para llamar a esta teoría 'epistemografía' porque se trata de conocimiento ('epistemológico'), pero, a diferencia de la epistemología, no en una perspectiva histórica: más bien, epistemografía es una clase de geografía del conocimiento" (p.480).

Su teoría consta de cinco sistemas fuertemente interrelacionados: (a) El universo matemático: Aquí se responde a la pregunta: ¿qué es? *Para hacer las matemáticas*, es necesario tener un poco de conocimiento de *algo*. Drouhard llama un 'objeto matemático' ese '*algo*'. Está conformado por estos objetos matemáticos, sus relaciones y propiedades; (b) El sistema de representación semiolingüístico: Son los conocimientos acerca de los sistemas de representación semiótica, sus elementos y sus reglas. Son semiolingüístico ya que en la actividad matemática se emplean representaciones lingüísticas, tales como enunciados en lenguaje natural o algebraico y representaciones semióticas no lingüísticas como gráficos cartesianos, tablas, dibujos, etc. Estos conocimientos responden a la pregunta: ¿cómo decir, escribir o representar?; (c) Los instrumentos: Son los conocimientos prácticos, como técnicas, uso de instrumentos, metodologías y procedimientos heurísticos. Distingue entre los conocimientos relacionados con los instrumentos

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

materiales (los artefactos) y conocimiento acerca de los instrumentos lingüísticos (por ejemplo, el tratamiento de representaciones semióticas). Estos conocimientos responden a la pregunta ¿cómo hacerlo?; (d) Las reglas del juego matemático: Tienen que ver con el mecanismo legitimador; es decir, debe tenerse a la mano un cuerpo de normas que respondan a la pregunta: ¿cuáles son los instrumentos legítimos a usar en la resolución de un cierto problema?, y (e) Los identificadores: Comprende el reconocimiento o el establecimiento de lo que se hace, este tipo de conocimiento permite: (1) Reconocer en las expresiones generales que se manifiestan mientras se realiza una actividad matemática lo que se cree que *es o no matemática*; (2) Identificar distintos dominios, con estilos de trabajo diferentes.

De acuerdo con Rojano (1994) “para Drouhard existen objetos de enseñanza del álgebra, cuyas dificultades de aprendizaje no pueden ser descritas en términos conceptuales, ya que dichos objetos no constituyen conceptos” (p.52). En consecuencia, “este autor plantea como problema básico clarificar qué son las escrituras algebraicas (ya que no son conceptos) y cuáles sus significaciones. (Rojano, 1994; p. 52)

Teoría de Lakoff y Núñez acerca de la naturaleza de las matemáticas

Lakoff y Núñez (2000) retoman una discusión de vieja data, se trata del problema filosófico acerca del ser de las Matemáticas. De enorme trascendencia es la pregunta ¿De dónde provienen las matemáticas? Muchos son los filósofos y matemáticos que se han dedicado a cavilar esta pregunta y las posibles respuestas: las matemáticas existen en alguna parte del universo; o, son una creación de la mente humana. La primera postura fue asumida por Platón (siglo IV

a. C), significa que la labor del matemático, en primera instancia, es acceder a ellas mediante complejos mecanismos humanos de captación y descubrimiento; en el segundo caso, se trata de una obra producto de la imaginación. Ambas visiones también tienen implicaciones para la enseñanza.

Los autores retoman dichas preguntas y le dan respuestas desde una perspectiva cognitiva de la ciencia, pero lo novedoso de su aporte estriba en la naturaleza empírica de sus afirmaciones. De acuerdo con ellos, se trata de una demostración, por primera vez, de que los humanos nacen con una base innata de aritmética. De tal manera que los logros en las matemáticas los son en virtud de una maravillosa obra de creación. Según su punto de vista, la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos.

Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Por razones de tipo evolutivo, todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas. Debido a su origen común, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son producto de convenciones completamente sociales y culturales aunque los aspectos sociales e históricos juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas.

La metáfora es un concepto importante en el desarrollo de la teoría de estos autores ya que la conciben como aprender un concepto en términos de otro (Lakoff y Johnson, 1980). En contraposición al modelo tradicional, la teoría de la

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

metáfora conceptual de Lakoff y Johnson (1980) la consideran como una proyección entre dos dominios semánticos distintos, que permite comprender lo abstracto a partir de lo concreto. El dominio semántico a partir del cual se forma la metáfora se denomina dominio de origen y pertenece a un dominio conceptual concreto, que tiene una base sensorial y/o motriz. Por el contrario, el dominio semántico en el que se proyecta la metáfora se denomina dominio de destino y pertenece a un ámbito conceptual más abstracto.

En función de lo anterior, en las matemáticas, Lakoff y Johnson (1980) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales: (a) *metáforas grounding*, son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo, *un espacio vectorial es una caja de cosas*, *una función es una máquina*, etc.; y, (b) *metáforas linking*, tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas; en general, se sustentan sobre el concepto de isomorfismo. Ejemplo de ellas las tenemos en las siguientes afirmaciones *los números reales son los puntos de una recta*, *un operador lineal en un espacio finito dimensional es una matriz cuadrada*, *el espacio R^2 es el mismo espacio R^{2x1}* (los pares ordenados como matrices columnas), etc.

Consideraciones finales

La didáctica del álgebra en los niveles básicos y medios del sistema escolar venezolano podríamos decir que es un territorio inexplorado si tomamos en cuenta los distintos enfoques para la enseñanza del álgebra escolar, por lo que teorizar sobre este tema es una tarea pendiente. Desde el punto de vista metodológico

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

contiene muchas carencias, ya que el abanico de recursos y estrategias luce muy reducido, inespecífico y en consecuencia de poco impacto. Sin embargo, a pesar de esta descripción o quizás por ella misma, creemos y apostamos a las posibilidades de la línea de investigación LIDALGEBRA dedicada al desarrollo de investigaciones cuyos asuntos de interés indagatorio se concentren alrededor del pensamiento algebraico. En González (2015) se presentan detalladamente algunos temas específicos que pueden ser estudiados, se identifican aspectos de todos los niveles, incluyendo los que tienen que ver con la formación inicial del profesor de matemática. En particular, en el nivel primario creemos que es prioritario dedicarse al estudio de los enfoques para la introducción del álgebra de Bednarz, Kieran y Lee (1996), así como también investigar en torno a las corrientes *álgebra temprana* y *pre álgebra* relacionadas con los fines del álgebra y sus momentos didácticos más oportunos. Somos optimistas en que estos contenidos pueden desarrollarse con investigaciones robustas metodológicamente, sin recurrir a la preeminencia de una teoría particular en el ámbito de la EM, pues creemos que la complejidad tanto de la matemática escolar como la de su enseñanza, así como también el devenir histórico de las distintas corrientes científicas, nos han demostrado los beneficios del multiperspectivismo. Al final de cuentas lo que aspiramos es generar amplias discusiones, y que nuestros escolares sean receptores de los beneficios de una didáctica del álgebra innovadora y moderna.

Educ@ción en Contexto, Vol. VII, N°14, Julio-Diciembre, 2021. ISSN 2477-9296

Referencias

Andonegui, M. (2009). *La Matemática de primer año de bachillerato.* Mérida, Venezuela*:* XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

Barrio, E.; Lalanne, L.; Petich, A. (2010). *Entre y aritmética y álgebra: Un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: Investigaciones y aportes*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers

Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16 (1), 113-148.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique á l algébre dans l'enseignement des mathématiques au college. Premiére partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petix X*, (5), 51-94.

Davydov, V. (1995). *Introduction to the grade 1 teacher manual*.

Drouhard, J.P. (2009). Epistemography and algebra. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th -February 1st 2009, Lyon (France). Disponible en http://ife.enslyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/cerme6.[Fecha de consulta: 11 enero, 2015]

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, 9(1), 143–168.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo editorial Iberoamérica

González, A. (2015). Lidalgebra: propuesta de una línea de investigación en didáctica del álgebra y pensamiento algebraico En Sanoja (Presidencia), *Libro de Resúmenes* (pp. 218-236). Conferencia llevada a cabo en la VII Jornada de Investigación en Educación Matemática, Maracay, Venezuela.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 85-97.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163–171). July 9–13, Paris, France

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana*. EU: Teorema

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* E.U: Basic Books

Mosquera, j. (2017). Historia reciente de la enseñanza del álgebra lineal en la Educación Media. *Educación en contexto*, 6(11), 98-122.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (Tesis doctoral). Universidad de la Laguna, España.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA,* 4(2), 37-62.

Samper de C. C. (1996). Geometría como instrumento del Álgebra**.** *Educación Matemática,* 8(3), 85-94.

Schlieman, A.; Carraher, D.; Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidos.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza *Sapiens*. *Revista Universitaria de Investigación*, Año 12, Nº 1, junio 2011, pp.122-142

Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Universitaria de formación del profesorado* 32, 73-86, Revista en línea Disponible en dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/117980.pdf.[Fecha de consulta: 28 enero 2014].

Socas, M. (1999). *Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico.* En Ortega, Tomás (Ed.), Actas del III SEIEM (pp. 261-282). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *Revista de didáctica de las Matemáticas*, Vol. 77, 5–34.

Valdivé, C. y Escobar, H. (2011). Estudio de los polinomios en contexto. *Revista Paradigma*, Vol. XXXII, Nº 2, 85 – 106.